1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + az = 2 \\ y + z = b \end{cases} ,a, b \in \mathbb{R}$$

(a) Classique o sistema em função dos valores dos parâmetros *a* e *b*; indicando o grau de indeterminação (ou o nº de graus de liberdade).

Resolução:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & b-1 \end{array}\right)$$

Logo,

- Se $a \neq 2 \; e \; b \neq 1 \; \Rightarrow r(A|b) = r(A) = 3 \Rightarrow$ o sistema é possível determinado
- Se $a = 2 \; e \; b \neq 1 \; \Rightarrow r(A|b) = 3, r(A) = 2 \neq r(A|b) \Rightarrow$ o sistema é impossível
- Se $a \neq 2 \; e \; b = 1 \; \Rightarrow r(A|b) = r(A) = 3 \Rightarrow$ o sistema é possível determinado
- Se $a = 2 \; e \; b = 1 \; \Rightarrow r(A|b) = r(A) = 2 < 3 \Rightarrow$
  o sistema é possível indeterminado com um grau de liberdade.

(b) Considerando *a* = 3 e *b* = 2, determine o valor de *y* (da solução) usando a regra de Cramer.

Resolução:

Utilizando a regra de Cramer,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (0+3) - (1+1) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-6) - (1-2) = -3$$

3. Determine:

(a) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x) = \ln(1 + x^2)$, em torno do ponto 2.

Resolução:

O polinómio de Taylor de grau 2 de f(x) em torno do ponto 2 é dada por:

$$f(x) \approx f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)(x-2)^2}{2}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Logo,

$$f(x) \approx \ln(5) + \frac{4}{5}(x-2) + \frac{-6/_{25}\,(x-2)^2}{2} = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{26}{25}x + \ln(5) - \frac{52}{25}$$

(b) Determine a derivada e os intervalos de monotonia da função $F(x) = \int_0^{x+x^2} \ln(2+t^2)\,dt$.

Resolução:

$F'(x) = \left(\int_0^{x+x^2} \ln(2+t^2)\,dt\right)' = (x+x^2)' \ln(2+(x+x^2)^2) = (1+2x)\ln(2+(x+x^2)^2)$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+2x) = 0 \vee \ln(2+(x+x^2)^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \vee 2 + (x+x^2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \vee (x+x^2)^2 = -1\ (impossível)$

	$-\infty$	$-1/_2$	$+\infty$
$1+2x$	-	0	+
$\ln(2+(x+x^2)^2)$*	+	+	+
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	Min.	↗

*Note que $\ln(2+(x+x^2)^2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ pois $2+(x+x^2)^2 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Logo,

- $F(x)$ é estritamente decrescente em $]-\infty, -1/_2[$;
- $F(x)$ é estritamente crescente em $]-1/_2, +\infty, [$;
- $F(x)$ tem um mínimo (local) em $x = -1/_2$